

К. М. ТУЛЕНБАЕВ, АБДУЛЛАХ ЙЫЛДЫРАЙ, РЕСУЛ УЗУНТАШ, Н. А.
КУДАЙБЕРГЕНОВА

(Университет им. Сулеймана Демиреля)

НИЛЬПОТЕНТНОСТЬ ЭВОЛЮЦИОННЫХ АЛГЕБР

Аннотация

Статья посвящена описанию реализации алгоритма Бухбергера нахождения базиса Гребнера бикоммутативных алгебр.

Ключевые слова: алгоритм Бухбергера, бикоммутативные алгебры, базис Гребнера.

Кілт сөздер: Бухбергер алгоритмі, бикоммутативті алгебра, Гребнер базисі.

Keywords: Buchberger algorithm, Bicommutative algebra, Gröbner bases.

Эволюционные алгебры задаются следующими умножениями на базисных элементах:

$$e_i * e_j = 0$$

$$e_i * e_i = \sum_{k=1}^n a_{ik} e_k$$

Определение. Эволюционная алгебра A называется ниль-алгеброй, если для любого a существует натуральное $n = n(a)$, такое что $a^n = 0$.

Теорема 1. Пусть $A = \text{Lin}\langle e_1, \dots, e_n \rangle$ является эволюционной ниль-алгеброй, тогда для любого k и любых $i_1, i_2, \dots, i_k \in \{1, 2, \dots, n\}$, таких что $i_p \neq i_q$, если $p \neq q$ выполняется равенство $a_{i_1 i_2} a_{i_2 i_3} \dots a_{i_k i_1} = 0$ для структурных коэффициентов.

Доказательство: Основание индукции $(e_i * e_i) * e_i = a_{ii}(e_i * e_i) = 0 \Rightarrow a_{ii} = 0$

Аналогично

$$\left(\sum_{i=1}^k e_i \right)^{s+2} = \sum_{\phi \in S_k} a_{\phi(1)\phi(2)} a_{\phi(2)\phi(3)} \dots a_{\phi(k)\phi(1)} e_{\phi(1)}^2$$
$$\left(\sum_{i=1}^k e_i \right)^{s+2} = \sum_{i=1}^k \sum_{\phi \in S_k: \phi(1)=i} a_{\phi(1)\phi(2)} a_{\phi(2)\phi(3)} \dots a_{\phi(k)\phi(1)} e_i^2$$

Обозначим
$$F_i = \sum_{\phi \in S_k: \phi(1)=i} a_{\phi(1)\phi(2)} a_{\phi(2)\phi(3)} \dots a_{\phi(k)i}$$

Покажем, что $F_i = F_j$ для любых i и j .

Для любой перестановки $\phi \in S_k$ с условием $\phi(1)=i$ построим перестановку φ с условием $\varphi(1)=j$ и $a_{i\phi(2)} a_{\phi(2)\phi(3)} \dots a_{\phi(k)i} = a_{j\varphi(2)} a_{\varphi(2)\varphi(3)} \dots a_{\varphi(k)j}$. Ч. Д. Т.

Случайная последовательность называется Марковской цепью, если для каждого шага вероятность перехода из любого состояния S_i в любое состояние S_j не зависит от того, когда и как система S оказалась в состоянии S_i . Так как система S в любой момент t может пребывать только в одном из состояний $S_1, \dots, S_n$, то при каждом $k = 1, 2, \dots$ события $S_1(k), \dots, S_n(k)$ несовместны и образуют полную группу.

Основными характеристиками Марковских цепей являются вероятности $p_i(k) = p(S_i(k)) (i = 1, \dots, n; k = 1, 2, \dots)$ событий $S_i(k)$.

Вероятности $p_i(k) (i = 1, \dots, n; k = 1, 2, \dots)$ называются вероятностями состояний.

Таким образом, вероятность i состояния на k шаге $p_i(k)$ есть вероятность того, что система S от k до $(k+1)$ шага будет пребывать в состоянии S_i . Сумма вероятностей этих событий для каждого $k = 1, 2, \dots$ равна 1:

$$p = (p_{ij})_{i,j=1}^n = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n1} & p_{n2} & \dots & p_{nn} \end{pmatrix}, \quad \sum_{j=1}^n p_{ij} = 1, i = 1, \dots, n$$

$$\sum_{i=1}^n p_i(k) = 1, k = 1, 2, \dots$$

Если переходные вероятности не зависят от шагов k , то Марковская цепь называется однородной. Если же хотя бы одна вероятность изменяется с изменением шага k , то цепь называется неоднородной. Запишем переходные вероятности в виде квадратной матрицы p порядка n , сумма элементов каждой строки равна 1.

Наличие на размеченном графе стрелок и соответствующих им переходных вероятностей из одного состояния в другое означает, что эти вероятности отличны от нуля. Напротив, отсутствие стрелок из одного состояния в другое говорит о том, что соответствующие им переходные вероятности равны нулю. Вероятности задержек

$p_{ii} (i = 1, \dots, n)$ можно подсчитать по формуле $p_{ii} = 1 - \sum_{j=1, j \neq i}^n p_{ij} = 1, (i = 1, \dots, n)$. Вектор-строка

вероятностей состояний $(p_1(0), \dots, p_n(0))$ в начальный момент времени $t = 0$, непосредственно предшествующий первому шагу, называется вектором первоначального распределения вероятностей.

Для однородной Марковской цепи вектор-строка вероятностей состояний от k до $(k+1)$ шага равна произведению вектора-строки вероятностей состояний от $(k-1)$ до k шага на матрицу переходных вероятностей: $(p_1(k), \dots, p_n(k)) = (p_1(k-1), \dots, p_n(k-1)) * P$.

Эволюционный оператор задается следующим образом:

$$L(e_i) = \sum_{k=1}^n p_{ki} e_k$$

$$\rho_j L(e_i) = p_{ji} e_j$$

$\|\rho_j L^{l+m}(e_i)\|$ – вероятность попадания из состояния e_i в e_j ровно за $(l+m)$ -шагов.

Следующие теоремы очевидны в силу определения эволюционного оператора.

Теорема 2. Пусть C – подмножество множество состояний системы $S=\{e_i\}$ является замкнутым в смысле вероятности, тогда и только тогда векторное пространство, натянутое на C , является подалгеброй.

Теорема 3. Множество состояний C марковской цепи X замкнуто, тогда и только тогда $\rho_j L(e_i) = 0 \quad \forall e_i \in C, e_j \notin C$

Замкнутость множества состояний означает, что если цепь попадает в это множество состояний, то она не покидает данное множество.

У однородной Марковской цепи переходные вероятности постоянны, не зависят от шагов (практически каждая переходная вероятность на любом шаге пренебрежимо мало отличается от постоянной для нее величины).

Основными вероятностными прогнозными характеристиками Марковской цепи являются вероятности состояний на любом шаге $p_i(k) (i=1,2,\dots)$ [1].

Все многообразие Марковских цепей подразделяется на эргодические и разложимые.

Разложимые Марковские цепи содержат невозвратные состояния, называемые поглощающими. Из поглощающего состояния нельзя перейти ни в какое другое. На графе поглощающему состоянию соответствует вершина, из которой не выходит ни одна дуга. В установившемся режиме поглощающему состоянию соответствует вероятность, равная 1.

Как указывалось выше, из поглощающего состояния нельзя перейти ни в какое другое, у поглощающих дискретных марковских цепей имеется множество, состоящее из одного или нескольких поглощающих состояний.

Теорема 4. Состояние e_k является поглощающим тогда и только тогда, когда e_k является идемпотентом в алгебраическом смысле, то есть $e_k * e_k = e_k$.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Зарисский О., Самюэль Р. Коммутативная алгебра. – М.: ИЛ, 1963.
- 2 Dzhumadil'daev A. S., Tulenbaev K. M. Hilbert basis theorem for nonassociative algebras // Com. Algebra. 2013. № 4. (To be published).
- 3 Бухбергер Б. и др. Компьютерная алгебра: символьные и алгебраические вычисления. – М.: Мир, 1986.

REFERENCES

- 1 Zarisskij O., Samjujel' R. Kommutativnaja algebra. – M.: IL, 1963.
- 2 Dzhumadil'daev A. S., Tulenbaev K. M. Hilbert basis theorem for nonassociative algebras // Com. Algebra. 2013. № 4. (To be published).
- 3 Buhberger B. i dr. Komp'juternaja algebra: simvol'nye i algebraicheskie vychislenija. – M.: Mir, 1986.

Резюме

К. М. Түленбаев, Абдулла Йылдырай, Ресул Узунташ, Н. А. Құдайбергенова

(Сүлеймен Демирел атындағы университет)

ЭВОЛЮЦИОНДЫ АЛГЕБРАНЫҢ НИЛЬПОТЕНТТІЛІГІ

Мақала биокмутативті алгебраның Гребнер базисі жанында болатын Бухбергер алгоритмін жүзеге асырылуын сипаттауға арналған.

Кілт сөздер: Бухбергер алгоритмі, бикоммутативті алгебра, Гребнер базисі.

Summary

K. M. Tulenbayev, Abdullah Yildiray, Resul Uzuntash, N. A. Kudaibergenova

(Suleyman Demirel University)

NILPOTENCY OF EVOLUTION ALGEBRAS

The article describes the implementation of Buchberger's algorithm of finding a Gröbner basis bicommutative algebra.

Keywords: Buchberger algorithm, Bicommutative algebra, Gröbner bases.

Поступила 25.04.2013г.